

Matice, regularita, inverze

Cvičení 0: Dokažte, že $(AB)^T = B^T A^T$.

Cvičení 1: Nalezněte nějakou nenulovou matici A takovou, že $AA = 0$.

Cvičení 2: Pokud existují, nalezněte inverzní matice k maticím:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cvičení 3: Matice A, B se liší záměnou 2. a 3. řádku, jak se liší matice A^{-1} a B^{-1} ?

Cvičení 4: Zjednodušte následující výraz, kde A, B jsou regulární čtvercové matice stejných rozměrů:

$$(I - B^T A^{-1})A + (A^T B)^T A^{-1}$$

Cvičení 5: Dokažte pro matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Je-li $A^2 = 0$, pak $I_n - A$ je regulární.
- Je-li $A^k = 0$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, pak je $I_n - A$ regulární.
- Je-li $A^k = 0$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, pak je $I_n + A$ regulární.

Cvičení 6: Dokažte, že pro $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A regulární platí $(ABA^{-1})^k = AB^k A^{-1}$

Cvičení 7: Pokud existují, nalezněte inverzní matice k maticím:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Domácí úkol

Cvičení 1(5 bodů): Necht matice A^2 má inverzní matici B . Dokažte, že A je regulární a vyjádřete její inverzi.

Cvičení 2(5 bodů): Spočtěte inverzní matici k následující.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Cvičení 3(5 bodů): Nalezněte netriviální matici splňující $A = -A^{-1}$.