Permutace

Cvičení 1: Mějme permutace

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najděte jejich cykly, znaménka, inverze a složte permutace p, q mezi sebou oběmi směry.

Cvičení 2: Mějme permutaci

$$p = (1, 3, 4)(2, 5)(6, 11, 10, 9, 8, 7).$$

Spočítejte p^9 a p^{-14}. Pro jakou nejmenší mocninu $k \geq 1$ dostaneme $p^k = \mathrm{id}$?

Cvičení 3: Určete znaménko permutací r, s, kde

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}, s = (1, 3, \dots, 2n-1, 2, 4, 6, \dots, 2n)$$

Cvičení 4: Najděte všechny permutace komutující s transpozicí $t = (1, 2)$.

Cvičení 5: Najděte všechny permutace splňující $p \in S_{10}$ a $p^2 = (1, 3)(2, 4)(7, 8, 9, 10)$.

Cvičení 6: Dokažte, že složením permutací dostaneme permutaci.

Cvičení 7: Dokažte, že znaménko permutace p lze ekvivalentně definovat jako $\mathrm{sgn}(p) = (-1)^s$, kde s je počet cyklů p sudé délky.

Domácí úkol

Cvičení 1(5 bodů): Mějme permutace

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad q = (135)(24)(6).$$

Spočítejte $q \circ p$, $p \circ q$, p^{11}, p^{-1}, sgn(p), sgn(p^{11}), sgn(p^{-1}).

Cvičení 2(5 bodů): Ukažte, že pro $n \geq 2$ je počet lichých a sudých permutací v S_n stejný.

Cvičení 3(5 bodů): V grupě $(G, \circ, ^{-1}, e)$ ukažte, že

a) $e^{-1} = e$.
b) $(a^{-1})^{-1} = a$.
c) $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.
d) pokud $a \circ b = a$, tak $b = e$.

Cvičení 4(10 bodů): Rozhodněte zda je grupou

- $(\mathbb{Q}, \cdot)$
- $(\mathbb{Q}, -)$
- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$, kde $a \circ b = |ab|$
- $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $a \circ b = a + b + 3$
- $(\mathcal{F}, +)$, kde $\mathcal{F}$ je množina všech reálných funkcí jedné proměnné
- množina rotací v $\mathbb{R}^2$ kolem počátku s operací skládání zobrazení
- množina posunutí v $\mathbb{R}^2$ s operací skládání zobrazení
- množina $\left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$ s operací maticovým součinem