Lineární (ne)závislost

Cvičení 1: Zjistěte zda jsou vektory v $\mathbb{R}^3$ lineárně závislé či nezávislé.

- $(2, 3, -5), (1, -1, 1), (3, 2, -1)$
- $(2, 0, 3), (1, -1, 1), (0, 2, 1)$

Cvičení 2: Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zdali jsou následující množiny lineárně závislé či nezávislé.

- $\{u, u + v, u + w\}$
- $\{u - v, u - w, v - w\}$

Cvičení 3: Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ a nechť $X \subseteq Y \subseteq V$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

- Je-li X nezávislá, je Y závislá.
- Je-li X nezávislá, je Y nezávislá.
- Je-li X závislá, je Y závislá.
- Je-li Y nezávislá, je X nezávislá.
- Je-li Y závislá, je X závislá.

Cvičení 4: Nakreslete si částečně uspořádanou množinu všech podmnožin $\{u, v, w, z\}$. Představte si, že u, v, w, z jsou vektory z $\mathbb{R}^4$ a že si vybarvíte ve vašem obrázku všechny množiny co jsou lineárně závislé. Jaké všechny možné obrázky můžete mít nakreslené?

Cvičení 5: Určete, zdali následující množiny vektorů jsou nezávislé v prostoru reálných funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nad tělesem $\mathbb{R}$).

- $\{2x - 1, x - 2, 3x\}$
- $\{x^2 + 2x + 3, x + 1, x - 1\}$
- $\{\sin(x), \cos(x)\}$

Domácí úkol

Cvičení 1(5 bodů): Ukažte, že vektory $v_1, \ldots, v_n \in V$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $v_1, v_1 + v_2, \ldots, \sum_{i=1}^{n} v_i$ jsou lineárně nezávislé.

Cvičení 2(5 bodů): Pro které hodnoty parametru $a \in R$ jsou vektory $(1, a, 1)$, $(1, 1, 1)$ a $(2, 2, a)$ lineárně nezávislé?

Cvičení 3(10 bodů): Rozhodněte zda existuje množina vektorů se složkami z $\{0, 1, 2\}$ takových, že

- Byly lineárně závislé v $\mathbb{Q}^n$ i v $\mathbb{Z}_3^n$.
- Byly lineárně nezávislé v $\mathbb{Q}^n$ i v $\mathbb{Z}_3^n$.
- Byly lineárně nezávislé v $\mathbb{Q}^n$, ale závislé v $\mathbb{Z}_3^n$.
- Byly lineárně závislé v $\mathbb{Q}^n$, ale nezávislé v $\mathbb{Z}_3^n$.