Báze, dimenze a maticové prostory

Cvičení 1: Ve vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ vyjádřete vektor $(3,2,4)^T$ jako lineární kombinaci vektorů $(3,3,2)^T, (1,1,4)^T, (0,2,1)^T$. Je toto vyjádření jednoznačné?

Cvičení 2: Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru V

- $M = \{(1,2,0,0)^T, (2,1,1,3)^T, (0,1,0,1)^T\}, V = \mathbb{R}^4$
- $M = \{-x^2, x + x^2, x^3 - 1\}$, V je prostor reálných polynomů stupně nejvýše tři.

Cvičení 3: Mějme matici A. Rozhodněte, které z prostorů jsou určitě stejné. $\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Ker}(A^T)$, $\mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Im}(A^T)$, $\mathcal{S}(A)$, $\mathcal{S}(A^T)$, $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{R}(A^T)$.

Cvičení 4: Rozhodněte nad tělesy $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$, zda pro matici $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ platí

- $(1,2)^T \in \mathrm{Ker}(A)$
- $(1,2)^T \in \mathcal{S}(A)$

Cvičení 5: Nalezněte báze prostorů $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ a $\mathrm{Ker}(A)$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Cvičení 6: Nalezněte matici A takovou, že

- $\mathbb{R}(A)$ obsahuje vektory $(1,1)^T$, $(1,2)^T$ a $\mathcal{S}(A)$ obsahuje $(1,0,0)^T$, $(0,0,1)^T$.
- bázi $\mathbb{R}(A)$ i $\mathcal{S}(A)$ tvoří vektor $(1,2,1)^T$.
- $\mathcal{S}(A)$ obsahovalo $(1,1,2)^T$ a $(1,2,0)^T$ a $\mathrm{Ker}(A)$ obsahovalo $(0,3,1)^T$

Cvičení 7: Najděte matici A nad tělesem $\mathbb{Z}_3$ s co nejmenším počtem řádků tak, aby $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Im}(B)$, kde B je následující matice nad Z_3.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Domácí úkol

Cvičení 1(6 bodů): Rozhodněte zda pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí

- $\mathcal{R}(A) \cap \mathrm{Ker}(A) = \{o\}$
- $\mathcal{R}(A+B) = \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B)$

Pokud dané tvrzení platí, nalezněte jiné těleso (než $\mathbb{R}^{n\times n}$), kde dané tvrzení neplatí.

Cvičení 2(5 bodů): Rozhodněte, zda je posloupnost vektorů $M = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right)$ bází vektorového prostoru $\mathbb{Q}^3$ nad tělesem $\mathbb{Q}$

Cvičení 3(9 bodů): Nalezněte dimenze a báze následujících prostorů a ověřte, že se jedná o vektorové prostory.

- Vektory o n složkách nad $\mathbb{R}$, které mají součet všech složek nulový.
- Funkce $\mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_3$ nad $\mathbb{Z}_3$, se standardním součtem funkcí a násobením skalárem ze $\mathbb{Z}_3$.
- Polynomy p stupně nanejvýš 4 nad $\mathbb{R}$ takové, že $p(3) = 0$ a $p(2) = 0$.