Lineární zobrazení a matice přechodu

Cvičení 1: Maté dány vektory vzhledem k bázi $B = \{(0,1,2)^T, (1,2,2)^T, (-1,-1,1)^T\}$. Nalezněte jejich zápis vzhledem k Bázi $B' = \{(0,1,1)^T, (0,2,1)^T, (1,0,1)^T\}$:

- $v = (0,0,1)^T$.
- $v = (1,0,1)^T$.
- $v = (4,2,9)^T$.
- $v = (1,4,2)^T$.

Cvičení 2: Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}^2$ dané maticí

$$F =_{B_V} [f]_{B_U} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

kde

$$B_U = \{(-1,0,3)^T, (2,-2,2)^T, (0,1,-3)^T\},$$
$$B_V = \{-x^2 + x, x - 1, x^2 + 1\}$$

Rozhodněte:

- Je zadané zobrazení „na“?
- Je zadané zobrazení prosté?
- Kam se zobrazí vektor $(1,1,1)$ zapsaný v kanonické bázi?
- Nalezněte vektor v kanonické bázi, který se zobrazí na x^2.
- Nalezněte matici zobrazeni f vzhledem ke kanonickým bázím prostorů $\{(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T\}$ a $\{1, x, x^2\}$.

Cvičení 3: Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ dané maticí

$$F =_{kan} [f]_{B_U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

kde

$$B_U = \{(0,1,3)^T, (1,2,0)^T, (0,1,3)^T\},$$

Rozhodněte:

- Je zadané zobrazení „na“?
- Je zadané zobrazení prosté?
- Kam se zobrazí vektor $(1,1,1)$ zapsaný v kanonické bázi?
- Nalezněte vektor v kanonické bázi, který se zobrazí na $(2,1,2)$.
- Nalezněte matici zobrazeni f vzhledem ke kanonickým bázím.

Domácí úkol

Cvičení 1(20 bodů): Mějme vektorový prostor $\mathcal{K}$ všech pseudokružnic v $\mathbb{R}^2$, což jsou rovnice tvaru

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0,$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ jsou parametry dané kružnice.

- Ukažte, že se opravdu jedná o vektorový prostor, tedy že je uzavřený na lineární kombinace a obsahuje nulový „vektor“.
- Dokažte, že $\mathcal{K}$ má dimenzi 4 a nalezněte nějakou jeho bázi $B_{\mathcal{K}}$.

Mějme vektorový prostor $\mathcal{Q}$ všech polynomů p stupně nejvýše 2 takových, že $p(1) = 0$.

- Ukažte, že se opravdu jedná o vektorový prostor, tedy že je uzavřený na lineární kombinace a obsahuje nulový „vektor“.
- Dokažte, že $\mathcal{Q}$ má dimenzi 2 a nalezněte nějakou jeho bázi $B_{\mathcal{Q}}$.

Uvažme lineární zobrazení $f\colon \mathcal{K} \to \mathcal{Q}$ dané maticí

$$F =_{B_{\mathcal{Q}}} [f]_{B_{\mathcal{K}}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

kde $B_{\mathcal{K}}$ a $B_{\mathcal{Q}}$ jsou vaše zvolené báze. Rozhodněte

- Je zadané zobrazení „na“?
- Je zadané zobrazení prosté?
- Kam se zobrazí kružnice $x^2 + y^2 - 1 = 0$?
- Nalezněte všechny kružnice, které se zobrazí na nulový polynom.
- Nalezněte všechny kružnice, které se zobrazí na polynom $x - 1$.

Některé odpovědi odpovědi závisí na volbě vaší báze. Které?