Jádro, obraz a afinní prostory

Cvičení 1: O lineárním zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je známo, že vektory $(1,2,0)^T$ a $(2,0,1)^T$ náleží do jádra a $f((1,1,1)^T) = (3,6)^T$.

- Je zadané zobrazeni určeno jednoznačně?
- Určete $\dim(f(\mathbb{R}^3))$.
- Nalezněte matici zobrazení vzhledem ke kanonické bázi.

Cvičení 2: Nalezněte jádro a obraz lineárního zobrazení $f: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definováno předpisem $A \mapsto A + A^T$.

Cvičení 3: Mějme zobrazení druhé derivace $d: \mathcal{P}^n \to \mathcal{P}^n$.

- Ukažte, že se jedná o lineární zobrazení.
- Nalezněte jeho jádro a obraz.

Cvičení 4: Rozhodněte zda jsou vektory $(1,2,3)^T$, $(2,3,1)^T$, $(1,3,2)^T$ a $(2,1,3)^T$ afinně závislé.

Cvičení 5: Dokažte, že množina řešení soustavy $Ax = b$ je uzavřená na afinní kombinace.

Cvičení 6: Uvažujme dvě afinní zobrazení f, g v rovině, přičemž f představuje překlopení podle přímky $p: y = 10$ a g představuje překloplení podle přímky $q: x = 2$.

- Zapište zobrazení f a g jako nějaké složení posunutí a maticového násobení.
- Zapište složené afinní zobrazení $f \circ g$.

Domácí úkol

Cvičení 1(5 bodů): Rozhodněte zda jsou vektory $(2,1,2)^T$, $(1,0,1)^T$, $(3,3,2)^T$ a $(2,2,1)^T$ afinně závislé nad tělesem $\mathbb{Z}_7$.

Cvičení 2(8 bodů): Dokažte, že průnik dvou afinních prostorů je zase afinní prostor.

Cvičení 3(5 bodů): Nalezněte isomorfismus mezi prostory $\{v \in \mathbb{R}^4 \mid (1,2,3,4)v = 0\}$ a $\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A^T = A\}$.