

Báze, dimenze a maticové prostory

Cvičení 1: Ve vektorovém prostoru \mathbb{Z}_5^3 vyjádřete vektor $(3, 2, 4)^T$ jako lineární kombinaci vektorů $(3, 3, 2)^T, (1, 1, 4)^T, (0, 2, 1)^T$. Je toto vyjádření jednoznačné?

Cvičení 2: Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru V

- $M = \{(1, 2, 0, 0)^T, (2, 1, 1, 3)^T, (0, 1, 0, 1)^T\}, V = \mathbb{R}^4$
- $M = \{-x^2, x + x^2, x^3 - 1\}, V$ je prostor reálných polynomů stupně nejvýše tři.

Cvičení 3: Mějme matici A . Rozhodněte, které z prostorů jsou určitě stejné. $\text{Ker}(A), \text{Ker}(A^T), \text{Im}(A), \text{Im}(A^T), \mathcal{S}(A), \mathcal{S}(A^T), \mathcal{R}(A), \mathcal{R}(A^T)$.

Cvičení 4: Rozhodněte nad tělesy $\mathbb{R}, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7$, zda pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ platí

- $(1, 2)^T \in \text{Ker}(A)$
- $(1, 2)^T \in \mathcal{S}(A)$

Cvičení 5: Nalezněte báze prostorů $\mathcal{R}(A), \mathcal{S}(A)$ a $\text{Ker}(A)$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Cvičení 6: Nalezněte matici A takovou, že

- $\mathcal{R}(A)$ obsahuje vektory $(1, 1)^T, (1, 2)^T$ a $\mathcal{S}(A)$ obsahuje $(1, 0, 0)^T, (0, 0, 1)^T$.
- bázi $\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{S}(A)$ tvoří vektor $(1, 1, 1)^T$ a báze $\text{Ker}(A)$ je $(1, -2, 1)^T$

Cvičení 7: Najděte matici A nad tělesem \mathbb{Z}_3 s co nejmenším počtem řádků tak, aby $\text{Ker}(A) = \text{Im}(B)$, kde B je následující matice nad \mathbb{Z}_3 .

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Domácí úkol

Cvičení 1(6 bodů): Rozhodněte zda pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí

- $\mathcal{R}(A) \cap \text{Ker}(A) = \{o\}$
- $\mathcal{R}(A + B) = \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B)$

Pokud dané tvrzení platí, nalezněte jiné těleso (než $\mathbb{R}^{n \times n}$), kde dané tvrzení neplatí.

Cvičení 2(5 bodů): Rozhodněte, zda je posloupnost vektorů $M = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ bází vektorového prostoru \mathbb{Q}^3 nad tělesem \mathbb{Q}

Cvičení 3(9 bodů): Nalezněte dimenze následujících prostorů a ověřte, že se jedná o vektorové prostory.

- Vektory o n složkách nad \mathbb{R} , které mají součet všech složek nulový.
- Funkce $\mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_3$ nad \mathbb{Z}_3 , se standardním součtem funkcí a násobením skalárem ze \mathbb{Z}_3 .
- Polynom p stupně nanejvýš 4 nad \mathbb{R} takové, že $p(3) = 0$ a $p(2) = 0$.