

Báze, dimenze a maticové prostory II.

Cvičení 1: Ve vektorovém prostoru \mathbb{Z}_3^3 vyjádřete vektor $(3, 2, 4)^T$ jako lineární kombinaci vektorů $(3, 3, 2)^T, (1, 1, 4)^T, (0, 2, 1)^T$. Je toto vyjádření jednoznačné?

Cvičení 2: Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru V

- $M = \{(1, 2, 0, 0)^T, (2, 1, 1, 3)^T, (0, 1, 0, 1)^T\}, V = \mathbb{R}^4$
- $M = \{-x^2, x + x^2, x^3 - 1\}, V$ je prostor reálných polynomů stupně nejvýše tři.

Cvičení 3: Mějme matici A . Rozhodněte, které z prostorů jsou určitě stejné. $\text{Ker}(A), \text{Ker}(A^T), \text{Im}(A), \text{Im}(A^T), \mathcal{S}(A), \mathcal{S}(A^T), \mathcal{R}(A), \mathcal{R}(A^T)$.

Cvičení 4: Rozhodněte nad tělesy $\mathbb{R}, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7$, zda pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ platí

- $(1, 2)^T \in \text{Ker}(A)$
- $(1, 2)^T \in \mathcal{S}(A)$

Cvičení 5: Nad \mathbb{R} nalezněte dimenze prostorů $\text{Ker}(A), \text{Im}(A), \mathcal{S}(A), \mathcal{R}(A), \text{Ker}(A^T), \text{Im}(A^T), \mathcal{S}(A^T), \mathcal{R}(A^T)$ pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 6: Nalezněte nějakou matici A na \mathbb{R} , která má dimenzi $\text{Ker}(A)$ rovnou 2 a dimenzi $\text{Im}(A)$ rovnou 3.

Cvičení 7: Nalezněte matici A takovou, že

- $\mathcal{R}(A)$ obsahuje vektory $(1, 1)^T, (1, 2)^T$ a $\mathcal{S}(A)$ obsahuje $(1, 0, 0)^T, (0, 0, 1)^T$.
- bázi $\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{S}(A)$ tvoří vektor $(1, 1, 1)^T$ a báze $\text{Ker}(A)$ je $(1, -2, 1)^T$

Cvičení 8: Najděte matici A nad tělesem \mathbb{Z}_3 s co nejmenším počtem řádků tak, aby $\text{Ker}(A) = \text{Im}(B)$, kde B je následující matice nad \mathbb{Z}_3 .

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 Domácí úkol

Cvičení 1(5 bodů): Nalezněte matici A nad \mathbb{R} , která má

- dimenzi $\text{Ker}(A)$ rovnou 1 a dimenzi $\mathcal{S}(A)$ rovnou 3.
- dimenzi $\text{Ker}(A)$ rovnou 1 a dimenzi $\mathcal{R}(A)$ rovnou 3.

Cvičení 2(5 bodů): Najděte bázi prostoru

$$W = \text{span}\{(1, 1, 3, 2)^T, (2, 3, 2, 3)^T, (1, -1, 3, 7)^T\}$$

obsahující vektor $v = (1, 3, -5, 0)^T$.

Cvičení 3(5 bodů): Zjistěte zda se rovnají vektorové prostory

$$U = \text{span}\{(1, 1, 1)^T, (0, 2, -2)^T\}, V = \text{span}\{(1, 0, 2)^T, (2, -1, 5)^T, (2, 1, 3)^T\}$$